

EXERCICE 1

Soient $(E, \star)$ un magma associatif avec élément neutre, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. Comment calculer rapidement x^n ? L'algorithme d'exponentiation rapide repose sur le principe suivant :

$$x^n = \begin{cases} x^{\frac{n}{2}} \times x^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ x^{\frac{n-1}{2}} \times x^{\frac{n-1}{2}} \times x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour dire les choses très sommairement, ce principe ramène le calcul de x^n à celui de $x^{\frac{n}{2}}$ ou $x^{\frac{n-1}{2}}$, et l'on répète cette réduction autant de fois qu'il est nécessaire.

- 1) Quand on calcule x^n naïvement, combien de produits effectue-t-on ?
- 2) Quand on calcule x^n avec l'algorithme d'exponentiation rapide, combien de produits doit-on effectuer au plus ?
- 3) Ecrire une procédure **récursive exporapide1** prenant pour arguments un réel x et un entier naturel n , et renvoyant x^n calculé avec l'algorithme d'exponentiation rapide.
- 4) Reprendre la question 3) en rédigeant cette fois une procédure **itérative exporapide2**.

EXERCICE 2

- 1) Chercher des renseignements sur la fonction **coeffs**.
- 2) Ecrire une procédure **récursive horner** prenant pour argument un polynôme P et un nombre complexe λ et calculant $P(\lambda)$ au moyen de l'algorithme de Horner.

EXERCICE 3

- 1) Chercher des renseignements sur les fonctions **iquo** et **irem**. On prendra soin de **NE PAS** utiliser ces fonctions dans les questions qui suivent.
- 2) Ecrire une procédure **récursive diveuc1** prenant pour argument un entier relatif a et un entier naturel non nul b et renvoyant le couple de la division euclidienne de a par b .
- 3) Reprendre la question 1) en rédigeant cette fois une procédure **itérative diveuc2**.

EXERCICE 4

A partir de la formule de Pascal, écrire une procédure **récursive pascal** prenant pour argument deux entiers naturels n et k et renvoyant 0 si $k > n$ et $\binom{n}{k}$ sinon.

EXERCICE 5

- 1) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$: $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, b - a)$.
- 2) Chercher des renseignements sur les fonctions **gcd** et **lcm**. On prendra soin de **NE PAS** utiliser ces fonctions dans les questions qui suivent.
- 3) Ecrire une procédure **récursive pgcd** prenant pour argument deux entiers relatifs et renvoyant leur PGCD.